

Der natürliche Süß- und Brackwasservorrat sandiger Meeresinseln

Schröder, Jens Jürgen

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 23, 1971/72,
S.237-259



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Der natürliche Süß- und Brackwasservorrat sandiger Meeresinseln¹⁾

Von **Jens Jürgen Schröder**

Vorgelegt von **Helmuth Hausen**

(Eingegangen am 20. November 1969)

Zusammenfassung

Aus dem aktuellen Anlaß der Suche nach einer Trinkwasserversorgungsmöglichkeit für die deutschen Nordseeinseln wird im Teil I eine möglichst exakte Theorie für die seit der Jahrhundertwende bekannte Erscheinung entwickelt, daß der Untergrund von sandigen Meeresinseln bis in beachtliche Tiefen von Süßwasser durchsetzt wird. In welcher Weise die Strömung in diesem angenähert linsenförmig gestalteten Süßwasserkörper bei einer Wasserentnahme durch Brunnen gestört wird, wird in Teil II zunächst für den rotationssymmetrischen Fall gezeigt. Dadurch gewinnt man eine Aussage über die zeitliche Veränderung der Linse und über den Salzgehalt des bei unterschiedlichsten geometrischen Bedingungen und Fördermengen durch den Brunnen eingezogenen Wassers. Die Ergebnisse dieser Betrachtung werden auf den der Wirklichkeit näher kommenden Fall einer gestreckten Insel mit beliebiger Brunnenanordnung übertragen.

Abstract

Searching for a method to supply the German coastal islands with potable water, in part I an exact theory for the wellknown phenomenon is developed: sandy islands bear sweet water up to remarkable depth within their ground.

Part II describes theoretically – mainly for rotational symmetry – how the percolation within this lenslike sweetwater body is altered by extraction of water through a well. This gives an answer on the question, in which way the lense deforms and the salt content of the sucked water changes with time dependent on geometrical and physical properties or output. The results of this study are useful in calculating real cases; i.e. long stretched islands with arbitrary grouping of wells.

Teil I

In Deutschland ist durch den ständig steigenden Fremdenverkehr und den gleichzeitig ansteigenden Wasserverbrauch pro Kopf der Bevölkerung, insbesondere für die Inseln vor der norddeutschen Küste, das Problem der Trinkwasserversorgung

¹⁾ Gekürzter Auszug aus der Dissertation des Verfassers [4].

akut geworden. Nachdem dort in früheren Jahren die geringen Anforderungen an die Wasserversorgung durch Zisternen noch recht und schlecht befriedigt werden konnten, trat schon einmal um die Jahrhundertwende ein Engpaß in der Wasserversorgung der Inseln auf. Damals machte man bei Versuchsbohrungen im Innern der Inseln [1] die zunächst überraschende Feststellung, daß der Sand, aus dem die Inseln zum großen Teil bestehen, bis in eine ziemlich große Tiefe unter dem mittleren Meeresspiegel von Süßwasser durchsetzt ist. Die niedergebrachten Brunnen gestatteten es bis jetzt, hieraus den Trinkwasserbedarf zu decken. Eine immer stärker werdende Förderung führte jedoch zu einem starken Anstieg des Salzgehaltes, so daß eine Verbesserung der Trinkwasserversorgung immer dringlicher wird.

Die Planung einer solchen verbesserten Wasserversorgung wirft jedoch die folgenden Fragen auf.

1. Kann man wenigstens einen Teil des Wasserbedarfs auf die Dauer aus der alten Quelle decken, oder
2. ist es möglich, ständig Brackwasser in ausreichender Menge für eine Trinkwassererzeugungsanlage nach den Membranverfahren (Elektrodialyse oder Hyperfiltration) [2, 3] zu fördern, oder
3. muß an eine Trinkwassererzeugung direkt aus Meerwasser nach den thermischen Verfahren (Flash-Verdampfung, Fallfilmverdampfung) [2, 3] gedacht werden?

Als Grundlage zur Beantwortung dieser Fragen wird nachstehend die Entstehung dieses Süßwasserspeichers und die darin stattfindende Sickerströmung untersucht.

A. Vereinfachende Annahmen und Voraussetzungen zur Lösung des Sickerströmungsproblems im Untergrund einer Insel

a) Geometrische Abmessungen

Für die Ost- und auch einige Nordfriesische Inseln ist eine schmale, langgestreckte Form charakteristisch. Es ist also, abgesehen von einem Bereich in der Nähe der Schmalseiten der Küste, in erster Näherung zulässig, die Strömungsvorgänge in einer Schnittebene quer zur Längsachse der Insel als ebenes Problem zu behandeln (Bild 1).

b) Niederschlagsverteilung

Bei der Berechnung soll von einer gleichmäßig über das Jahr verteilten Niederschlagsmenge von

$$N = 0,7 \text{ m}^3/\text{m}^2 \text{ Jahr}$$

ausgegangen werden, wie sie für die hiesigen geographischen Breiten üblich ist. Davon versickert bei ausgebildeter Vegetation an der Oberfläche nur ein geringer Bruchteil

$$\varepsilon = 0,2$$

in den Untergrund.

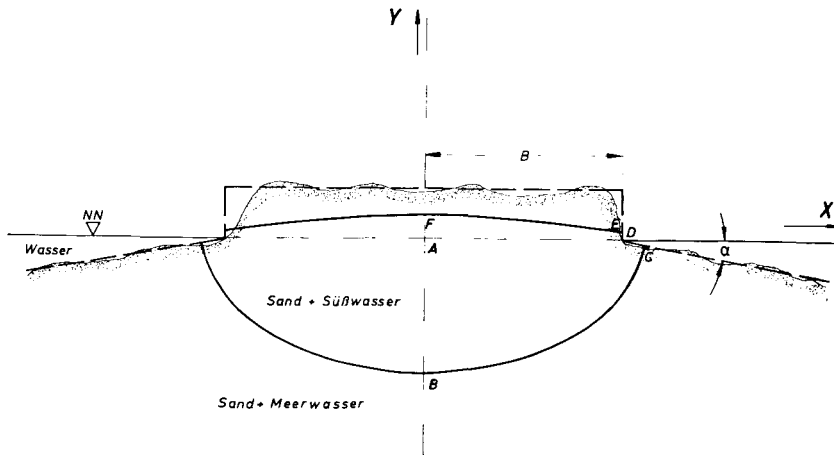


Abb. 1. Querschnitt einer Insel

c) *Gültigkeit des Darcy'schen Filtergesetzes*

Ein besonderes Merkmal der stationären Strömung von Wasser durch ein poröses Material ist die Proportionalität zwischen Druckgefälle und Durchflußmenge. Dieser Zusammenhang ist als Darcysches Filtergesetz bekannt

$$v(X, Y) = - \frac{k}{\varrho g} \text{grad} [p(X, Y) + \varrho g Y]. \quad (\text{I}, 1)$$

Hierin bedeuten

- $v(X, Y)$ den Vektor der Filtergeschwindigkeit,
- k den Durchlässigkeitsfaktor,
- $p(X, Y)$ den örtlichen Druck,
- X die waagrechte Entfernung von der Symmetrielinie des Querschnittes,
- Y die Höhe über dem Nullniveau NN,
- ϱ, ϱ' die Dichte des Wassers oder des Meerwassers,
- g die Erdbeschleunigung.

Der Durchlässigkeitsfaktor „ k “ ist bei Sanden und Kiesen eine Funktion der Korngröße und des Tongehaltes. Für die Berechnung wurde angenommen, daß unterschiedliche Durchlässigkeiten in verschiedenen Schichten so wirken, als ob eine konstante mittlere Durchlässigkeit wirksam wäre.

d) *Randeinflüsse*

Die Schwankungen des Meeresspiegels durch die Gezeiten, die im Mittel etwa 3 m betragen und sich ins Inselinnere phasenverschoben mit gedämpfter Amplitude fortpflanzen, müssen bei einer endgültigen Beurteilung beachtet werden, da sie einen Längs- und Querdurchmischungseffekt zwischen den beiden übereinander gelagerten Flüssigkeiten bedingen und statt einer scharfen Grenzlinie einen kontinuierlichen

Übergang zwischen Süß- und Meerwasser liefern. Hiervon soll im Abschnitt D die Rede sein. Im übrigen sind die Meeresspiegelschwankungen im Vergleich zu den für die Linsenentstehung maßgebenden zeitlichen Änderungen von so hoher Frequenz, daß der Meeresspiegel bezogen auf so lange Zeiträume als konstant angesehen werden kann.

B. Theorie der stationären Süßwasserlinse

Die Geschwindigkeitskomponenten des sickern den Wassers lassen sich nach Gl. (I,1) darstellen als die partiellen Ableitungen einer Potentialfunktion

$$\Phi = -\frac{k}{\varrho g} [p(X, Y) + \varrho g Y]. \quad (\text{I}, 2)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\Delta \Phi = 0 \quad (\text{I}, 3)$$

und aus der Helmholtzschen Bedingung für die Wirbelfreiheit

$$\Delta \Psi = 0, \quad (\text{I}, 4)$$

wenn Ψ eine zu Φ orthogonale Stromfunktion und Δ den Laplace-Operator bedeuten.

Aus der Funktionentheorie folgt ferner, daß der Real- und Imaginärteil einer beliebigen analytischen Funktion $\Omega(Z)$ der komplexen Variablen $Z = X + i Y$ als Potentialfunktion $\Phi(X, Y)$ bzw. als Stromfunktion $\Psi(X, Y)$ aufgefaßt werden können

$$\Omega(Z) = \Phi + i \Psi \quad (\text{I}, 5)$$

Damit ist ein gegebenes Netz von Potential- und Stromlinien den Methoden der konformen Abbildung [7] zugänglich. Auf dieser Grundlage läßt sich das Sickerströmungsgebiet des Süßwassers durch Randbedingungen zu Gl. (I,3) und Gl. (I,4) näher definieren (s. hierzu Abb. 1)

$$\text{AB:} \quad X = 0 \quad \Psi(X, Y) = 0$$

$$\text{BC:} \quad Y = Y_G(X) \quad \Psi(X, Y) = 0 \quad \Phi(X, Y) = k \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} Y_G(X)$$

$$\text{CD:} \quad Y = 0 \quad \Phi(X, Y) = 0$$

$$\text{DE:} \quad X = B \quad 0 < Y < Y_{G0} \quad \Phi(X, Y) = -k Y$$

$$\text{EA:} \quad Y = Y_{G0}(X) \quad \Psi(X, Y) = \varepsilon N X; \quad \Phi(X, Y) = -k Y_{G0}(X)$$

Die mathematische Lösung dieses Problems erweist sich dadurch als besonders schwierig, daß zwei Begrenzungslinien des Potentialströmungsgebietes – die Grundwasserlinie $Y_{G0}(X)$ und die Grenzlinie zwischen Süßwasser und Meerwasser $Y_G(X)$ – nicht vorgegeben sind, sondern nur implizit festgelegt sind, sich also frei einstellen.

Es wird deshalb versucht, ein solches Gebiet auf ein im mathematischen Sinne einfacher berandetes Gebiet konform abzubilden, ohne sich hinsichtlich der von einander abhängigen Grenzlinien $Y_G(X)$ und $Y_{G0}(X)$ näher festzulegen.

Hierzu wird zunächst eine dimensionslose komplexe Variable $z = x + iy$ in der Bildebene eingeführt, wobei als Bezugsgröße die halbe Inselbreite B gewählt wird (s. Abb. 2). Die entsprechende Variable in der Abbildungsebene laute $\zeta = \xi + i\eta$ (s. Abb. 3). Ferner sei ω ein komplexes Strömungspotential

$$\omega = \frac{\Omega}{B} = \varphi + \mathrm{i}\psi$$

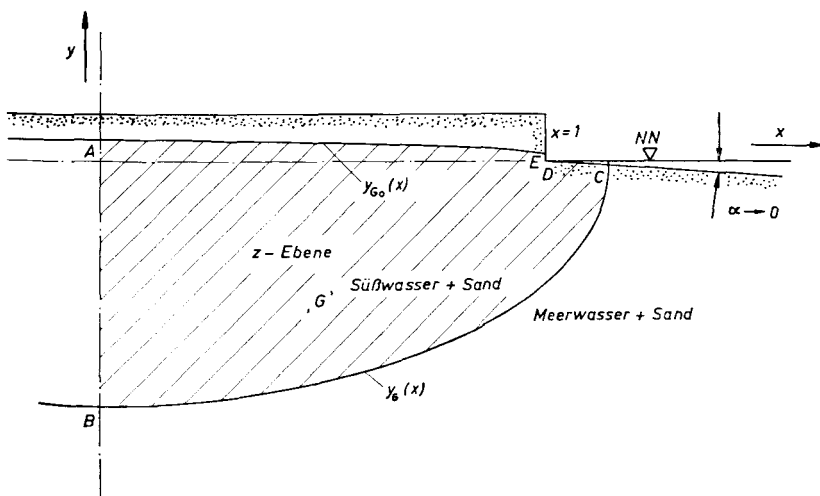


Abb. 2. Skizze des betrachteten Sickerquerschnitts „G“ des Süßwassers

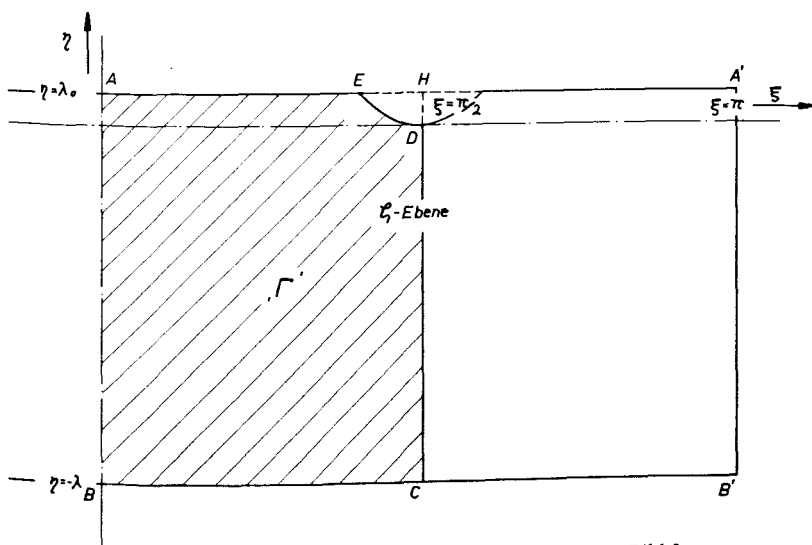
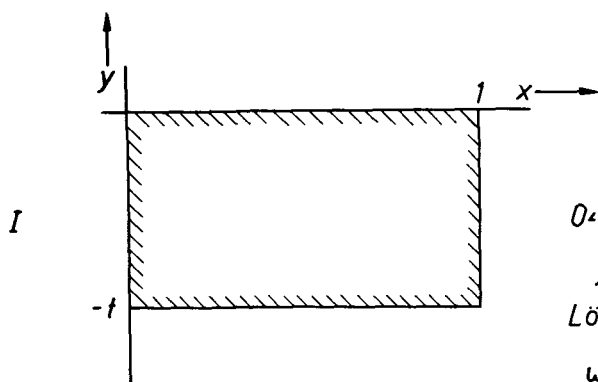
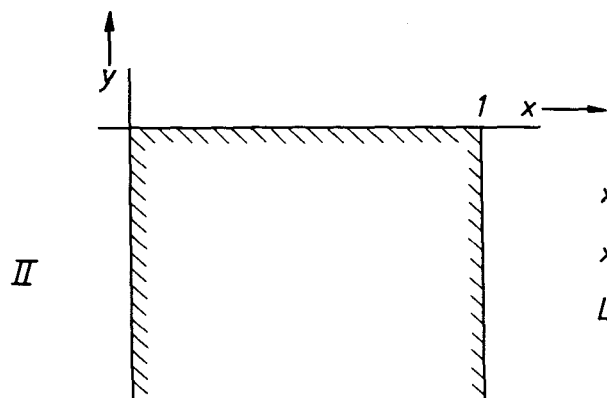


Abb. 3. Konforme Abbildung des Gebietes „G“ von Bild 2



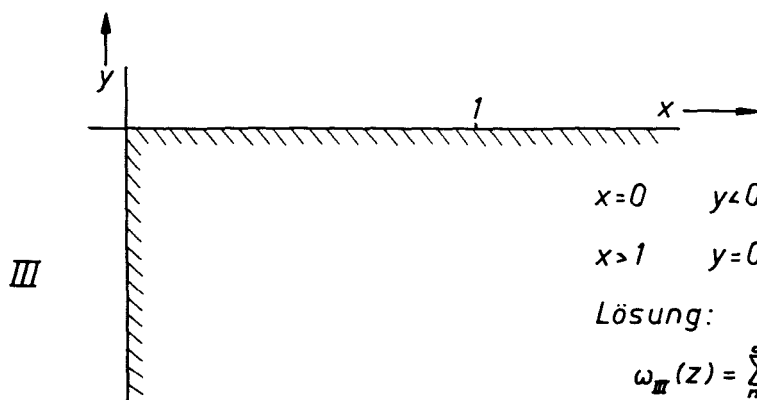
Lösung:

$$\omega_I(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\cos[(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}(z+it)]}{\sinh[(2n+1) \frac{\pi}{2}t]}$$



Lösung:

$$\omega_{II}(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-i(2n+1) \frac{\pi}{2} z}$$



Lösung:

$$\omega_{III}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [iz - \sqrt{1-z^2}]^{2n+1}$$

Abb. 4. Hilfslösungen

Die gewünschte Transformation der Linse auf ein rechteckförmiges Gebiet gelingt dann zunächst allgemein mit der Fourier-Entwicklung einer Abbildungsfunktion

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin [(2n+1)\zeta]. \quad (\text{I,6})$$

Außer den speziellen Ordinatenwerten λ und λ_0 sind darin $(n-1)$ Koeffizienten b_n frei wählbar. Der übrige Koeffizient ist durch die Lage des einzigen fixen Punktes, des Küstenpunktes D, bestimmt. Wie hier nicht näher erläutert werden soll, läßt sich die abgeschnittene Ecke des Rechteckes formal wieder ergänzen.

Es seien nun kurz einige Hilfslösungen beachtet. Das in Abb. 4 als Fall I skizzierte rechteckige Gebiet entspricht dem vervollständigten Gebiet in der ζ -Ebene der Abb. 3. Durch Separationsansatz für Gl. (I,3) unter Beachtung der invarianten Randbedingungen, erhält man die angegebene allgemeine Lösung. Allgemein, weil die Koeffizienten a_n als Koeffizienten einer in eine Fourierreihe entwickelten Randbedingung längs des oberen Rechteckrandes aufgefaßt werden können. Durch Grenzübergang ($t \rightarrow \infty$) findet man daraus die Lösung für den Fall II und durch konforme Polygonabbildung mit Hilfe des Schwarz-Christoffelschen Abbildungsintegrals die entsprechende Lösung für den Fall III. Diese Lösung wird später zur Berechnung der Linsenentstehung benötigt, da der hier dargestellte horizontale Wattverlauf den geographischen Gegebenheiten am nächsten kommt.

Die Hilfslösung I kann nach Koeffizientenvergleich als Lösung in der ζ -Ebene betrachtet werden. Die zusätzliche Randbedingung hinsichtlich der Potentialverteilung am unteren Rand, schreibt die Koeffizienten der Abbildungsfunktion vor, womit die gesuchte Lösung auch in der Bildebene festliegt. Man erhält als komplexes Strömungspotential:

$$\omega = \varepsilon N \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon N}{k} + \frac{q' - q}{q}}} \cdot \left[iz - \sqrt{\frac{k \frac{q' - q}{q}}{\varepsilon N} \left(1 + \frac{\varepsilon N}{k \frac{q' - q}{q}} + \frac{\varepsilon N}{k} + \frac{q' - q}{q} \right) \sqrt{1 - z^2}} \right] \quad (\text{I,7})$$

und daraus für die untere Grenzlinie:

$$\frac{\frac{\varepsilon N}{k \frac{q' - q}{q}} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon N}{k} + \frac{q' - q}{q}}}{\frac{\varepsilon N}{k \frac{q' - q}{q}} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon N}{k} + \frac{q' - q}{q}}} + \frac{x^2}{1 + \frac{\varepsilon N}{k \frac{q' - q}{q}} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon N}{k} + \frac{q' - q}{q}}} = 1 \quad (\text{I,8})$$

sowie für die Grundwasserlinie:

$$\frac{y_{Go}^2}{\frac{\varepsilon N}{k} \frac{q' - q}{q} 1 + \left(\frac{q' - q}{q} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon N}{k} \right)^2} + \frac{x^2}{1 + \frac{\varepsilon N}{k} \frac{q' - q}{q} 1 + \left(\frac{q' - q}{q} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon N}{k} \right)^2} = 1 \quad (1,9)$$

Abb. 5 zeigt eine maßstabgerechte Darstellung für den speziellen Fall der 2 km breiten Insel Norderney, wobei die angegebenen Werte für Versickerungsrate, Durchlässigkeit und Dichteverhältnis zu Grunde gelegt wurden. Eine Maximaltiefe von ca. 60 m für die Linse wurde um die Jahrhundertwende bei den zitierten Versuchsb Bohrungen [1] ebenfalls festgestellt.

Abb. 6 zeigt vergrößert den Verlauf in der Nähe der Küste. Es ergibt sich – allerdings nur theoretisch – eine relativ kleine Austrittsöffnung für das auf der gesamten Inseloberfläche versickernde Wasser zum Watt hin, oberhalb deren dann eine Vermischung mit dem Meerwasser stattfinden würde. Ein sehr geringer Bruchteil tritt theoretisch oberhalb des Nullniveaus in Form einer Hangquelle aus.

C. Wachstum einer Süßwasserlinse

Mit den angegebenen Gleichungen läßt sich nun auch die Entstehung einer solchen Süßwasserlinse nachvollziehen, wenn man die instationären Vorgänge, die sich über Jahrzehnte erstrecken, hinsichtlich der Gültigkeit des Darcyschen Filtergesetzes als quasistationär betrachtet. Dann läßt sich die Gesamtversickerung als Überlagerung zweier Potentialströmungen mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten deuten, wobei das Wachstum der Linse durch eine Potentialströmung bedingt wird, die dem Fall III der Hilfslösungen (Bild 4) entspricht.

In Umkehrung der bei der Berechnung der stationären Süßwasserlinse beschriebenen Vorgehensweise, bei der die angenommene konstante Versickerungsrate die Linsenform festlegte, findet man für eine beliebige zu einer Zeit τ vorliegenden Linsenabmessung die zugehörige Versickerungsrate. Die damit verbundene Sickerströmung sei durch das komplexe Strömungspotential

$$\omega_A(z, \tau)$$

eindeutig beschrieben. Hierzu ist nun zu jeder Zeit τ ein erzeugendes komplexes Strömungspotential

$$\omega_E(z, \tau)$$

zu addieren, das einerseits den Randbedingungen des Fall III genügt und andererseits die Versickerungsrate an der Oberfläche so ergänzt, daß die stationäre Versickerungsrate entsteht. Aus diesem komplexen Potential $\omega_E(z, \tau)$ errechnen sich die Komponenten der Änderungsgeschwindigkeit der Grenzlinie unter Berücksichtigung eines relativen Porenvolumens δ zu

$$U = \frac{1}{\delta} \Re \left\{ \frac{d\omega_E}{dz} \right\} \quad (1,10)$$

$$V = -\frac{1}{\delta} \Im \left\{ \frac{d\omega_E}{dz} \right\}$$

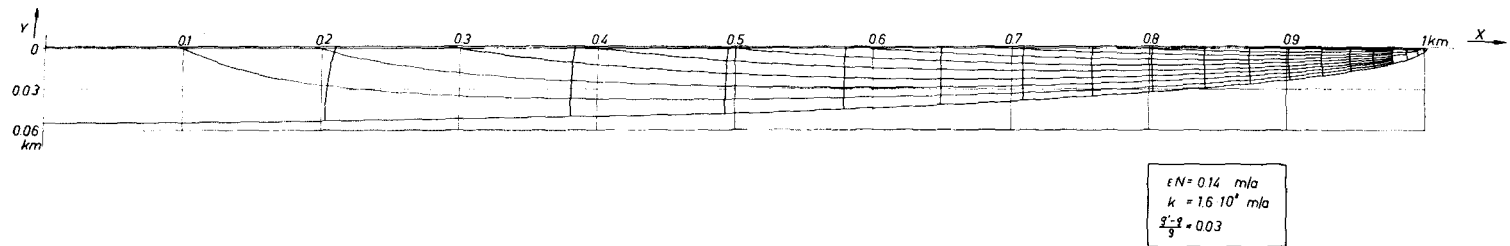


Abb. 5. Maßstabgerechte Darstellung der Strömungsverhältnisse in einer Süßwasserlinse
(z. B. unterhalb der Insel Norderney)

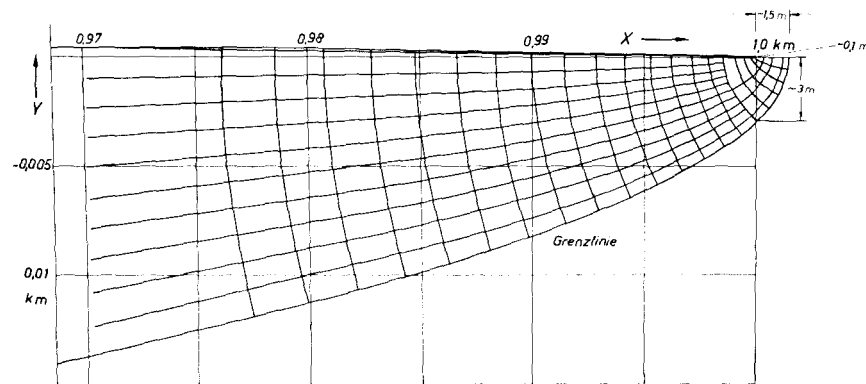


Abb. 6. Theoretische Austrittsöffnung einer Süßwasserlinse
(z. B. unterhalb der Insel Norderney)

womit die Änderung der Grenzlinie numerisch punktweise durch

$$x(\tau + \Delta\tau) = x(\tau) + \frac{1}{\delta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{d\omega_E}{dz} \right\} \Delta\tau \quad (1,11)$$

$$y(\tau + \Delta\tau) = y(\tau) - \frac{1}{\delta} \operatorname{Im} \left\{ \frac{d\omega_E}{dz} \right\} \Delta\tau$$

dargestellt werden kann.

Für den Fall Norderney wurde eine Rechnung nach den Gln. (1,11), ausgehend von einem zunächst gleichmäßig von Meerwasser durchsetzten Untergrund, auf einer elektronischen Rechenanlage durchgeführt. In Abb. 7 ist zunächst der Grenzlinienverlauf nach jeweils τ -Jahren dargestellt; dabei wurde die Ordinate gestreckt. Gerechnet wurde mit einem relativen Porenvolumen $\delta = 0,4$. Danach dauert es etwa 200 Jahre bis die Linse 90% ihres stationären Volumens erreicht hat. Abb. 8 zeigt nun Momentaufnahmen des Gesamtstromlinienverlaufes mit

$$\omega_G(z, \tau) = \omega_A(z, \tau) + \omega_E(z, \tau) \quad (1,12)$$

und zwar zu Beginn nach 100 Jahren und im stationären Zustand. Diese Darstellung vermittelt einen Eindruck von der Wirkung des Auftriebes, den das spezifisch leichtere Süßwasser im Meerwasser erfährt.

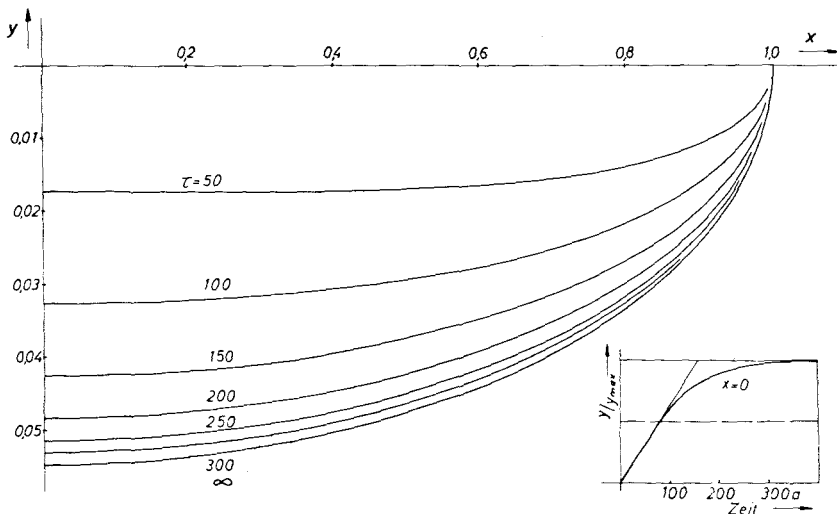


Abb. 7. Wachstum einer Süßwasserlinse; Grenzlinien nach τ Jahren und zeitliche Veränderung der Linsenmächtigkeit

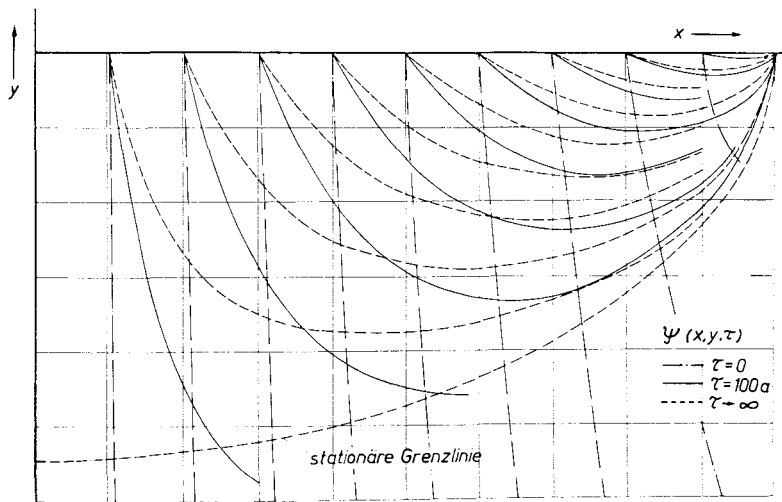


Abb. 8. Änderung des Stromlinienverlaufs während des Entstehens einer Süßwasserlinse

D. Einfluß der Meeresspiegelschwankungen auf die Grenze zwischen Süßwasser und Meerwasser

Die sich aus der bisherigen Lösung ergebende Unstetigkeit für die Tangentialgeschwindigkeit und für die Salzkonzentration beim Überschreiten der Grenzlinie ist selbstverständlich unreal. Stellt man sich daraufhin in einer Schnittebene eine Grenzschicht anstelle der Grenzlinie zwischen den beiden Flüssigkeiten vor, so wird in dieser Grenzschicht ständig auch Salz mit dem tangentialen Wasserstrom aus dem Untergrund der Insel an die Oberfläche gefördert, d.h. die Grenzschicht wandert ihrerseits in den von Meerwasser angefüllten Bereich vor (Auswaschung). Die Süßwasserlinse wird also ständig wachsen. Eine größere Linse wird jedoch eine größere Wassermenge fördern als der versickernden Niederschlagsmenge entspricht. Der obere Grundwasserspiegel müßte also absinken, wenn nicht aufgrund der Potentialänderung durch die Dichteverminderung im System eine entgegengerichtete Strömung im gesamten Inselrand hervorgerufen würde.

Nach dieser Vorüberlegung läßt sich bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen eine Achse an irgendeiner Stelle normal zur theoretischen Grenzlinie verläuft, eine Stoff- und Kräftebilanz für ein beliebiges Volumenelement aufstellen [4]. Dies führt auf ein System zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen, die sich auf die Blasiusche Grenzschichtdifferentialgleichung zurückführen lassen. Die Lösung ist abhängig von der Größe einer effektiven Diffusionszahl $Deff$, die den Salztransport aufgrund des Konzentrationsgefälles beschreibt. In Abb. 9 ist das Ergebnis einer solchen Rechnung für verschiedene effektive Diffusionszahlen dargestellt.

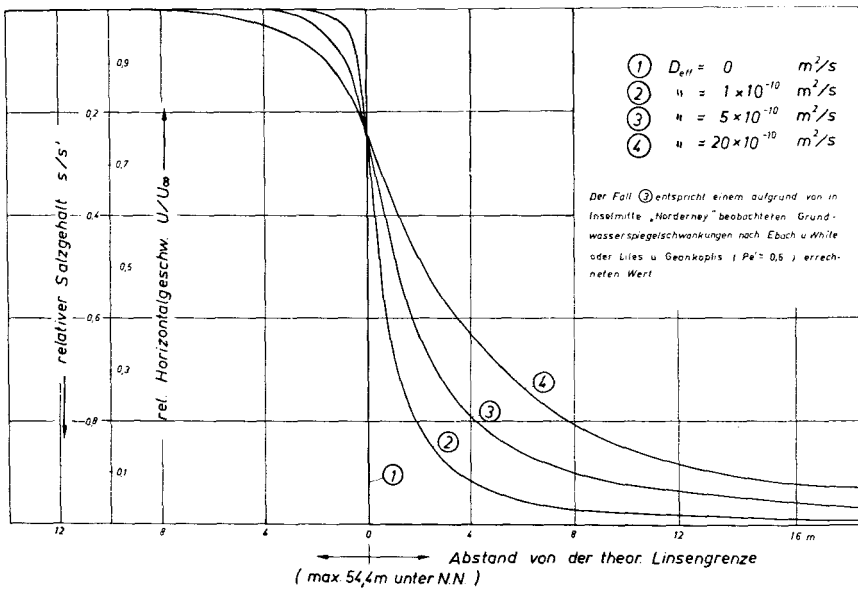


Abb. 9. Relativer Salzgehalt S/S' und relative Horizontalgeschwindigkeit U/U_0 in der Grenzschicht der als Beispiel errechneten „Süßwasserlinse Norderney“ bei verschiedenen effektiven Diffusionszahlen

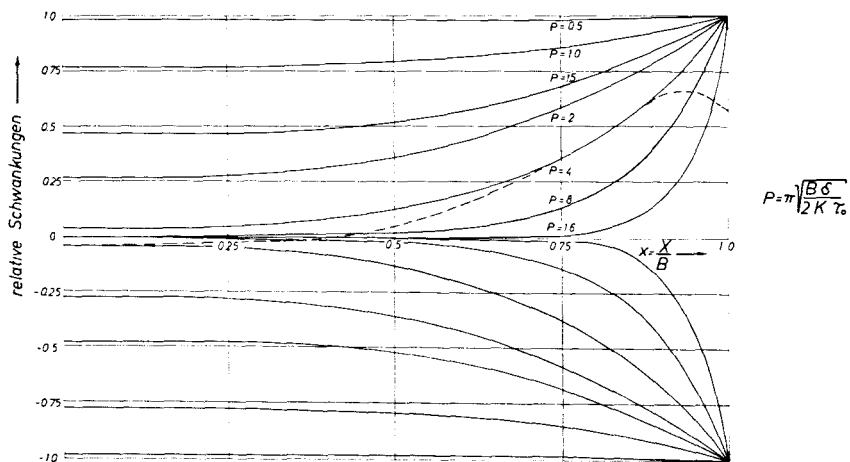


Abb. 10. Einhüllende der Grundwasserspiegelschwankungen im Inselnsand

Nun haben verschiedene Forscher [5, 6] nachgewiesen, daß diese effektive Diffusionszahl der Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeit im Sand proportional ist. Ein nennenswertes Maß für diese Relativgeschwindigkeit kann jedoch nur aus der Erscheinung abgeleitet werden, daß das gesamte Linsengebilde aufgrund der Meeresspiegelschwankungen im Untergrund der Insel schwingt, wobei die Amplitude zum Inselinnern gedämpft wird. Dies ist aus Abb. 10 zu ersehen, in der das Ergebnis einer entsprechenden Rechnung dargestellt wurde. Für das Beispiel Norderney ist die Kurve mit dem Parameter $P = 3$ maßgebend, woraus sich für die Inselmitte von Norderney eine effektive Diffusionszahl errechnet, die der Kurve (3) in der Abb. 9 entspricht. In einer breiten Zone im Inselinnern vollzieht sich demnach der Übergang in einer schmalen Grenzschrift von ca. 4 bis 5 m Dicke recht rapide.

Rein anschaulich läßt sich jedoch daraus schon extrapolieren, daß an der Austrittsöffnung einer solchen Linse zum Meer hin (Abb. 6) nur noch ein breiter Sickerstrom sehr brackigen Wassers ankommt, so daß in unmittelbarer Küstennähe an eine Süß- oder Brackwassergewinnung nicht mehr zu denken ist.

Teil II

Entnahme von Süß- und Brackwasser aus einer Süßwasserlinse

Nachdem in Teil I zunächst eine Theorie der Süßwasserlinse im Untergrund einer Meeresinsel aufgestellt worden ist, soll es das Ziel der folgenden Überlegungen und Berechnungen sein, für den Fall einer langen Insel konstanter Breite, ähnlich Norderney, eine Aussage darüber zu erlangen, was mit dieser Süßwasserlinse geschieht, wenn aus dem Untergrund im Innern der Insel ständig Wasser entnommen wird, und auf welche Weise an eine dauerhafte Versorgung der Insel mit Süß- oder Brackwasser aus diesem sich ständig wieder ergänzenden natürlichen Durchgangsvorrat zu denken ist.

A. Die Potentialströmung im Einzugsbereich eines Brunnens

Wird in eine unterhalb des Nullniveaus unendlich tiefe, ausgedehnte und hinsichtlich der Durchlässigkeit homogene Sandmasse, welche ausschließlich mit Süßwasser angefüllt ist, ein Brunnen abgeteuft, dessen poröse Wandungen bis zur Tiefe T_B herabreichen und aus dem pro Zeiteinheit die Wassermenge Q gefördert werde, und vernachlässigt man — was sich als zulässig erweist — den Durchmesser des Brunnens sowie die Abmessungen des sich notwendigerweise ausbildenden oberflächlichen Senkungstrichters gegenüber den übrigen Abmessungen, so lautet die potentialtheoretische Formulierung des Zufließvorganges zum Brunnen für diesen rotationssymmetrischen Fall

$$\frac{\partial^2 \psi^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0 \quad (II, 1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} = 0$$

Darin bedeuten

- R den Abstand von der Brunnenachse
 Y die Höhe über dem Nullniveau NN
 Ψ die Stromfunktion
 Φ die Potentialfunktion.

Die zugehörigen Randbedingungen lauten, wenn man hier zunächst von einer Ergänzung durch versickernden Niederschlag absieht

$$\begin{aligned}
 Y = 0 & & R > 0 & & \Psi = 0 \\
 -TB < Y < 0 & & R = 0 & & \Phi = \text{const}; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0 \\
 Y \leq -TB & & R = 0 & & \Psi = Q/2\pi
 \end{aligned} \quad (\text{II}, 2)$$

Nach Einführung der dimensionslosen Größen

$$\bar{r} = \frac{R}{TB}; \quad \bar{y} = \left| \frac{Y}{TB} \right|; \quad \psi = \frac{\Psi}{Q/2}; \quad \varphi = \frac{2\pi TB \Phi}{Q}$$

folgt als Lösung (siehe auch [4, 8, 9])

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{y}^2}{\psi^2} - \frac{\bar{r}^2}{1 - \psi^2} &= 1 \\
 \frac{\bar{y}^2}{\left(\frac{e^{2\varphi} + 1}{e^{2\varphi} - 1} \right)^2} + \frac{\bar{r}^2}{\left(\frac{2e^\varphi}{e^{2\varphi} - 1} \right)^2} &= 1.
 \end{aligned} \quad (\text{II}, 3)$$

Die Stromfunktionsflächen sind also koaxiale Hyperbelschalen, und die Potentialflächen werden durch die Oberflächen von Ellipsoiden dargestellt.

B. Zeitliche Veränderung einer fiktiven Grenzfläche zwischen zwei Süßwassermengen

Die effektive radiale Geschwindigkeitskomponente eines beliebigen Wasserteilchens im Einzugsgebiet eines solchen Brunnens lautet unter Berücksichtigung des relativen Porenvolumens δ

$$u = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial Y} = \frac{dR}{d\tau}. \quad (\text{II}, 4)$$

Durch Integration längs einer Stromlinie in einer axialen Schnittebene gewinnt man daraus die Zeit, die ein Strömungsteilchen braucht, um von einer koaxialen Zylinderoberfläche zur nächsten zu gelangen (s. Bild 11).

Schreibt man für die örtliche Änderung der fiktiven Grenzfläche

$$Y_G(R + \Delta R) = Y_G(R) + \frac{\partial Y_G}{\partial R} \Delta R,$$

so findet man unter Verwendung von Gl. (II, 3) und den dort benutzten dimensions-

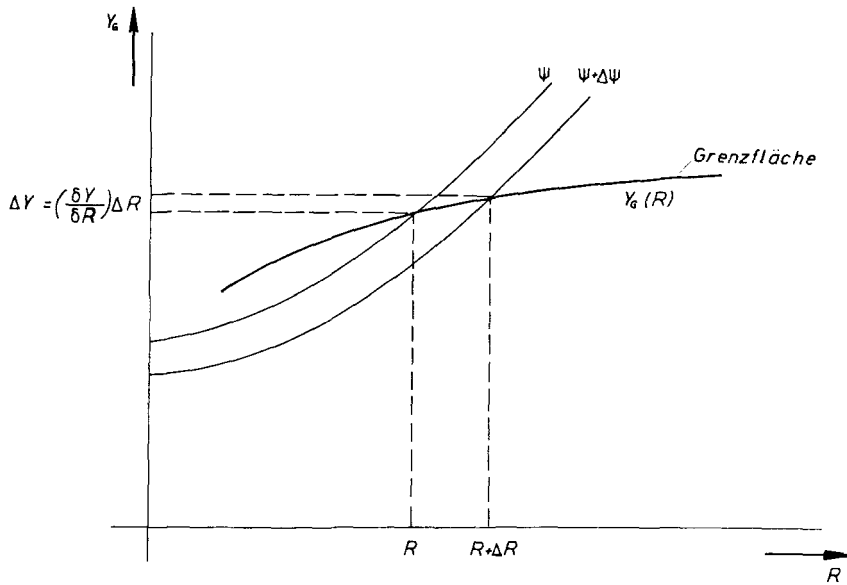


Abb. 11. Veränderung einer Grenzlinie durch Brunnenzuströmung

losen Größen nach einiger Umrechnung und Grenzübergang $\Delta R \rightarrow 0$ [4] für die Änderungsgeschwindigkeit der fiktiven Grenzfläche an der Stelle r

$$\left(\frac{\partial \bar{y}_G}{\partial \bar{r}} \right)_B = - \frac{\psi \left[\frac{\psi^2}{1 - \psi^2} \frac{\bar{r}}{\bar{y}_G} - \frac{\partial \bar{y}_G}{\partial \bar{r}} \right]}{\frac{\bar{y}_G \bar{r}}{1 - \psi^2}} \quad (11,5)$$

mit

$$\bar{r} = \frac{Q}{2\pi T B^3 \delta} r$$

Der Ausdruck $\frac{\psi^2}{1 - \psi^2} \frac{\bar{r}}{\bar{y}_G}$ stellt die Steigung der Stromfunktionsfläche ψ an der Stelle \bar{r} und \bar{y}_G dar. Tangieren Trennfläche und Stromfunktionsfläche, so muß an dieser Stelle die Absenkgeschwindigkeit momentan null sein.

C. Vereinfachte Beschreibung der Süßwassermächtigkeit in einer langgestreckten und einer kreisförmigen Insel

Eine exakte potentialtheoretische Berechnung der Strömungsverhältnisse in einer Süßwasserlinse einer langgestreckten Insel lieferte, wie im Teil I gezeigt wurde, für die stationäre Grenzlinie zwischen Süßwasser und Meerwasser eine exakt elliptische Form. Jede davon abweichende Form im instationären Fall läßt sich, da die Krüm-

mung von einerlei Vorzeichen sein wird, durch ein Stück einer Ellipse ersetzen, die sich durch α_s und λ_s anpassen läßt

$$\frac{(x - \alpha_s)^2}{\cosh^2 \lambda_s} + \frac{y_G^2}{\sinh^2 \lambda_s} = 1.$$

Für eine solche Ellipse gilt

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 y_G^2}{dx^2} = \frac{1 + \sinh^2 \lambda_s}{\sinh^2 \lambda_s}$$

Wie durch Gl. (I, 8) im Teil I gezeigt wurde, gilt für eine stationäre Linse

$$\sinh^2 \lambda_s \approx \frac{\varepsilon N}{k \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho}} \approx \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{y=0}}{k \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho}}$$

Bei natürlich vorkommenden Süßwasserlinsen ist dieser Ausdruck sehr viel kleiner als 1. Daraus folgt

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{y=0} = -\frac{k}{2} \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} \frac{d^2 y_G^2}{dx^2}. \quad (\text{II, 6})$$

Diese Gleichung entspricht formal der Dupuitschen Form des Darcysschen Filtergesetzes [8, 9]. Dieses gilt jedoch, entsprechend seiner Ableitung nur für sehr schwach geneigte Grenzlinienverläufe. Hier wurde gezeigt, daß diese Einschränkung nicht nötig ist. Eine entsprechende Überlegung für den rotationssymmetrischen Fall liefert dann

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{y=0} = -\frac{k}{2} \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dy_G^2}{dr} \right). \quad (\text{II, 7})$$

D. Berechnung des stationären Brunnensalzgehaltes für den rotationssymmetrischen Fall

Stellt man aufgrund der vorangegangenen Überlegungen für den rotationssymmetrischen Fall eine Bilanzgleichung des Süßwassers in einem Ringelement $d\bar{r}$ auf, so folgt, falls keine anderen Zu- oder Abführungen von Wasser erfolgen

$$\frac{\partial \bar{y}_G}{\partial \tau} = \frac{1}{2\delta} \frac{k}{TB} \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} \left(\frac{\partial^2 \bar{y}^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{y}_G^2}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\varepsilon N}{\delta TB} + \left(\frac{\partial \bar{y}_G}{\partial \tau} \right)_B$$

mit

$$\left(\frac{\partial \bar{y}_G}{\partial \tau} \right)_B = -\frac{1}{2\pi TB^3} \frac{Q}{\delta} \frac{\psi \left(\frac{\bar{r}^2}{1 - \psi^2} \frac{\bar{r}}{\bar{y}_G} - \frac{\partial \bar{y}_G}{\partial \bar{r}} \right)}{\frac{\bar{y}_G \bar{r}}{1 - \psi^2}} \quad (\text{II, 8})$$

Wird der Brunnen zur Zeit $\tau = 0$ in eine stationäre Süßwasserlinse getrieben, so folgt der Anfangswert unter Vernachlässigung der endlichen Austrittsöffnung am

Inselrand $\left(\bar{r}_i = \frac{RI}{TB}\right)$

$$\bar{y}_G(\bar{r}_i) = 0$$

$$\frac{\bar{y}_G^2(\tau = 0)}{\bar{r}_i^2 \frac{\varepsilon N}{2k \frac{q' - q}{q}}} + \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}_i^2} = 1.$$

Die Randbedingungen der Gl. (II, 8) lauten

$$\bar{y}_G(\bar{r}_i) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \bar{y}_G}{\partial \bar{r}}\right)_{\bar{r}=0} = 0.$$

Die Differentialgleichung (II, 8) wurde bei vorgegebenen Konstanten mit Hilfe eines Differenzenverfahrens auf einer elektronischen Rechananlage gelöst [4].

Da nach Gl. (II, 3) $\bar{y}_G(\bar{r} = 0, \tau)$ direkt das Verhältnis der vom Brunnen entnommenen Süßwassermenge zur Gesamtwassermenge bedeutet, ist der relative Salzgehalt s/s' (mit $s' =$ Salzgehalt des Meerwassers) aus

$$s/s'(\tau) = 1 - \bar{y}_G(\bar{r} = 0, \tau)$$

berechenbar. Die Bilder 12 und 13 zeigen als ein Beispiel das Ergebnis einer solchen Rechnung.

Es ist festzustellen, daß es einen stationären Zustand für eine Süßwasserlinse selbst bei lokaler starker Entnahme einer konstanten Wassermenge gibt. Die Ausbildung eines solchen stationären Zustandes dauert jedoch recht lange. Ein Brunnen, der bis in eine geringere Tiefe hinabreicht, als der lokalen Mächtigkeit der ungestörten Linse entspricht, wird dabei zunächst einige Zeit reines Süßwassers liefern. Hat jedoch die Süßwassergrenzlinie den Brunnen erreicht, so steigt der Salzgehalt relativ schnell auf den stationären Grenzwert an. Bei einem Brunnen, der zu Beginn an die Linsengrenze heranreicht, erfolgt der Anstieg stetig zum nahezu gleichen Grenzwert.

In einiger Entfernung vom Brunnen zeigt sich bei gleicher Fördermenge kaum noch ein Einfluß der Brunnentiefe auf den Trennlinienverlauf. Bei der Durchrechnung einer Vielzahl von stark voneinander abweichenden Fällen wurde festgestellt, daß der Einfluß des letzten Summanden in Gl. (II, 8) jenseits einer mit der geförderten Süßwassermenge QS durch

$$\bar{r}_{QS} = \sqrt{\frac{QS}{TB^2 \varepsilon N \pi}} \quad (\text{II, 9})$$

definierten Süßwasserscheidelinie gering ist. Daraus folgt aber auch, daß bei vorgegebenem \bar{r}_{QS} sowie $k \frac{q' - q}{q}$ und εN der relative Salzgehalt des im stationären

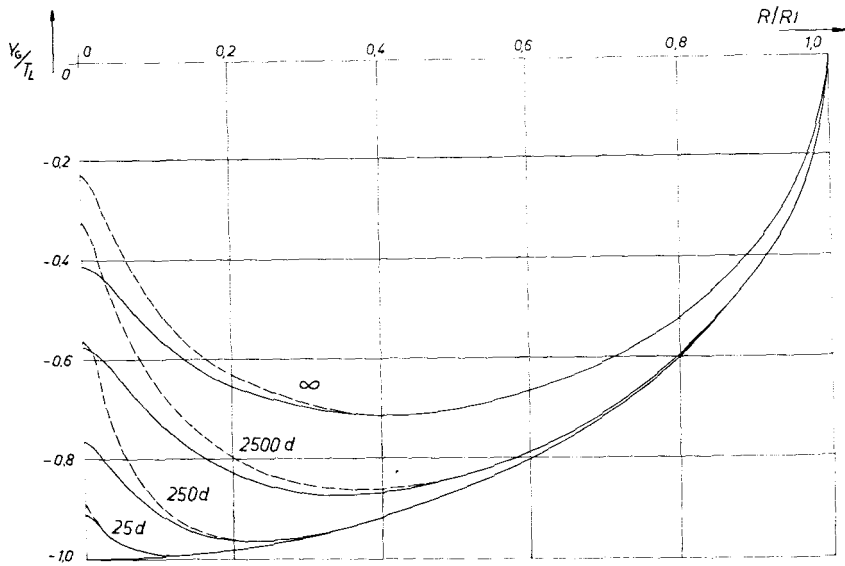


Abb. 12. Verlauf der Grenzlinie einer rotationssymmetrischen Süßwasserlinse ($RI = 1000\text{ m}$) bei einer gleichmäßigen Entnahme in Inselmitte von $600\text{ m}^3/\text{d}$ nach τ Tagen

Brunnentiefen: $TB = 50\text{ m}$ —————
 $TB = 25\text{ m}$ - - - - -

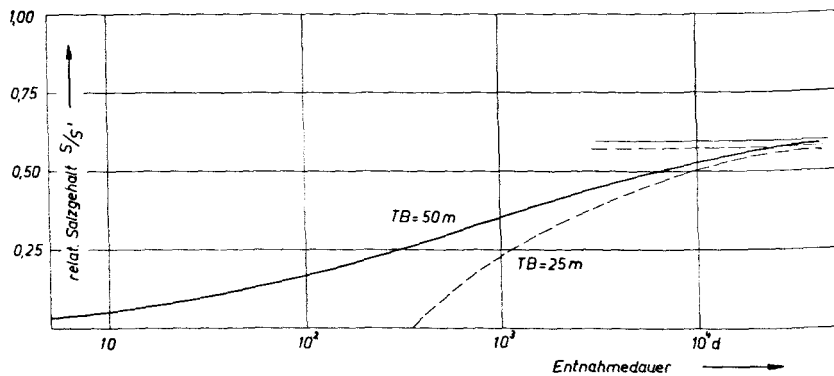


Abb. 13. Zeitliche Veränderung des relativen Salzgehaltes bei einer Entnahme (s. Bild 12).

Zustand geförderten Wassers in erster Näherung nur noch von der Mächtigkeit \bar{y}_{GQS} der Süßwasserlinse über der Scheidelinie abhängen kann.

Dabei wurde gefunden

$$s/s' = 1 - \bar{y}_{GQS} + g(\bar{r}_{QS}, \bar{y}_{GQS}), \quad (II, 10)$$

wobei $g(\bar{r}_{QS}, \bar{y}_{GQS})$ wie in Bild 14 für einige Fälle dargestellt in erster Näherung nur noch von \bar{r}_{QS} abhängt, wie die relative Lage der errechneten Werte zu einer ausgleichenden Kurve zeigt. Damit läßt sich unter den zugrundegelegten physikalischen Bedingungen

$$\varepsilon N \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ m/d}; \quad k \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} \approx 8 \cdot 10^{-2} \text{ m/d}$$

zur geförderten Süßwassermenge die im stationären Zustand zusätzlich geförderte Salzwassermenge bestimmen. Diese Art der Darstellung erwies sich für das folgende als besonders günstig.

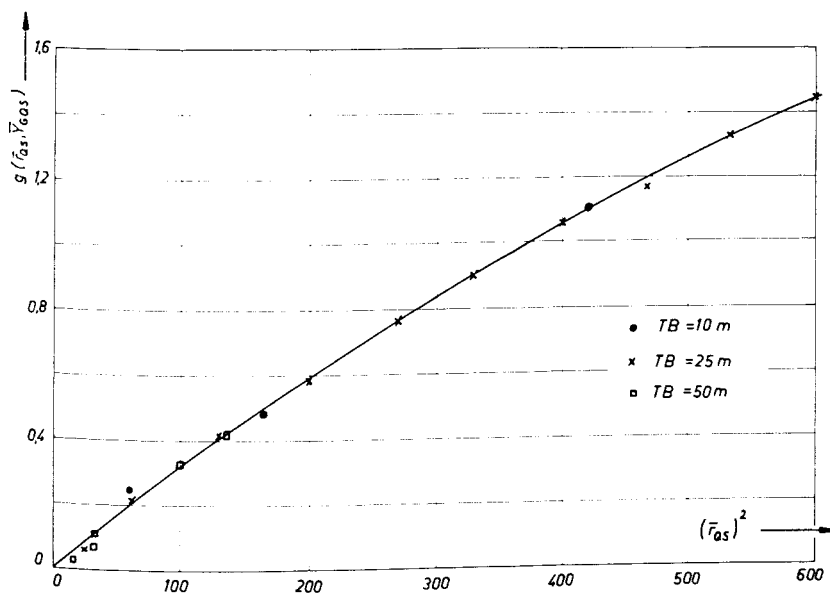


Abb. 14. Darstellung der durch Gl. (II, 10) definierten Funktion $g(\bar{r}_{QS}, \bar{y}_{GQS})$ abhängig von \bar{r}_{QS}^2 bei unterschiedlichen \bar{y}_{GQS}

E. Berechnung eines geeigneten Mittelwertes der stationären Mächtigkeit y_{GOS} für den Fall einer langgestreckten Insel mit beliebiger Brunnenverteilung

Wie aus den Berechnungen für den rotationssymmetrischen Fall zu erkennen ist, sind die Auswirkungen eines Brunnens jenseits seines Süßwassereinzugsbereiches nur gering. Ein Brunnen, der die Süßwassermenge QS fördert, wirkt also auf die stationäre Süßwasserlinse in einer Insel wie ein in den Untergrund eingesetzter großer Zylinder mit dem Radius

$$R_{QS} = \sqrt{\frac{QS}{\pi \varepsilon N}}$$

aus dem kein Süßwasser dem Inselrand zuströmt. Ferner wurde im Abschnitt C gezeigt, daß sich die Mächtigkeiten einer solchen Linse, abgesehen von den randnahen Gebieten der Insel, durch die Differentialgleichung (II,6) beschreiben lassen. Stellt man mit diesem Ansatz für den jetzt zweidimensionalen Fall eine Süßwasserbilanz über dem Flächenelement $dLdX$ auf, so lautet die mathematische Formulierung des Problems zunächst für den einfachsten Fall eines Einzelbrunnens mit S.W. Förderrate QS an beliebiger Stelle einer sehr langgestreckten Insel (Bild 15)

$$\frac{k}{2} \frac{q' - q}{q} \left(\frac{\partial^2 Y_G^2}{\partial \tilde{X}^2} + \frac{\partial^2 Y_G^2}{\partial L^2} \right) + q(X, L) = 0 \quad (\text{II}, 11)$$

$$q(X, L) \begin{cases} = \varepsilon N & \text{für } (\tilde{X} - A)^2 + L^2 \geq R_{QS}^2 \\ = 0 & \text{für } (\tilde{X} - A)^2 + L^2 < R_{QS}^2 \end{cases}$$

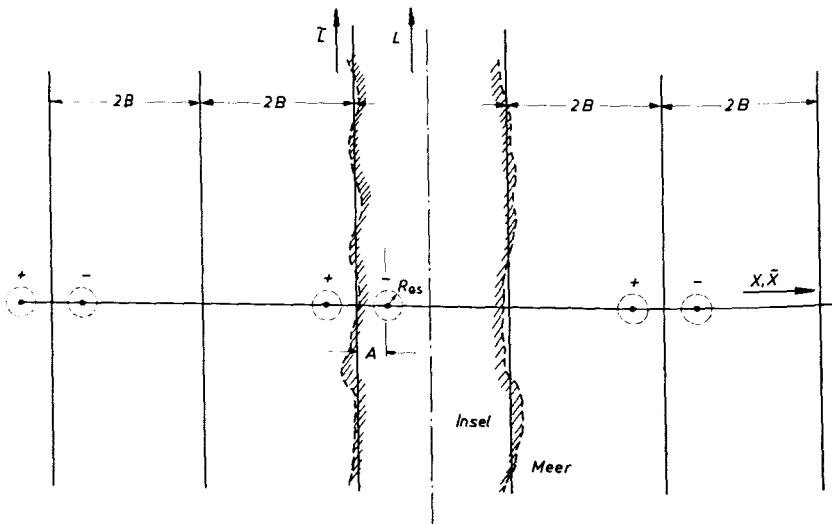


Abb. 15. Skizze zur Definition von Koordinaten an der Inseloberfläche und zur Erläuterung des zur mathematischen Lösung angewendeten Spiegelungsprinzips

mit den angenäherten Randbedingungen

$$X = \pm B \quad Y_G = 0.$$

Dabei wurde \tilde{X} zur Verkürzung der Schreibweise bezogen auf ein Koordinatensystem mit dem Ursprung auf dem Inselrand.

Die Gesamtlösung dieser Differentialgleichung läßt sich aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung sowie aus Lösungen der homogenen Differentialgleichung, die ebenfalls die Randbedingungen befriedigen, superponieren.

$$Y_G^2 = \frac{\varepsilon N}{k \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho}} B^2 \left[1 - \left(\frac{X}{B} \right)^2 \right] + \Delta Y_G^2. \quad (\text{II}, 12)$$

Nach Einführung einer komplexen Ortskoordinate $\tilde{Z} = \tilde{X} + iL$, läßt sich die Bedingung, daß im Einzugsbereich die Süßwassermenge nicht geändert werden soll, formal durch das Anbringen einer Senke in der Brunnenachse befriedigen.

Wäre nur die Randbedingung $Y_G = 0$ längs $\tilde{Z} = iL$ zu erfüllen, so genügte in mathematischem Sinne nach dem Singularitätenverfahren, wenn man sich die Insel jenseits $\tilde{Z} = iL$ [10] fortgesetzt denkt, die Anbringung einer Quelle gleich großer Ergiebigkeit spiegelbildlich zu dieser Geraden. Durch Spiegelung dieser aus Quelle und Senke bestehenden Gesamtsingularität an der Geraden $\tilde{Z} = 2B + iL$ und Vertauschung der Eigenschaft von Quelle und Senke, wird zwar die Randbedingung am linken Rand zunächst geringfügig wieder gestört, dafür jedoch am rechten Rand exakt erfüllt.

Durch ständige Wiederholung dieses Spiegelungsprinzips an den beiden genannten Geraden findet man schließlich

$$\begin{aligned} \Delta Y_G^2 = \left(QS/\pi k \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} \right) \Re \{ & \ln (\tilde{Z} - A) - \ln (\tilde{Z} + A) \\ & + \ln (\tilde{Z} - 4B - A) - \ln (\tilde{Z} - 4B + A) \\ & + \ln (\tilde{Z} + 4B - A) - \ln (\tilde{Z} + 4B + A) \\ & \pm \dots\dots\dots \}, \end{aligned}$$

wofür man schreiben kann

$$\Delta Y_G^2 = \left(QS/\pi k \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} \right) \Re \left\{ \ln \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2} \frac{\tilde{Z} - A}{2B} \right]}{\sin \left[\frac{\pi}{2} \frac{\tilde{Z} + B}{2B} \right]} \right\}.$$

Sind ν Brunnen der Süßwasserergiebigkeit QS_ν im Abstand A_ν vom linken Inselrand und im Abstand C_ν von der Abszisse entfernt vorhanden, so lautet die allgemeine Gleichung

$$\Delta Y_G^2 = \sum_{\nu=0} \Delta Y_{G\nu}^2 = \frac{1}{\pi k \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho}} \sum_{\nu=0} QS_\nu \Re \left\{ \ln \frac{\sin \frac{\pi}{4B} (\tilde{Z} - iC_\nu - A_\nu)}{\sin \frac{\pi}{4B} (\tilde{Z} - iC_\nu + A_\nu)} \right\} \quad (\text{II}, 13)$$

Zur angenäherten Bestimmung des Salzgehaltes bei einer mit der geförderten Gesamtwassermenge Q pro Einzelbrunnen oder je Einzelbrunnen einer Brunnenreihe entnommene Süßwassermenge QS , gilt es nun, daraus eine geeignete mittlere Mächtigkeit der Süßwasserlinse längs der oben definierten Süßwasserscheidelinie zu berechnen. Dafür scheint der quadratische Mittelwert am geeignetsten zu sein.

$$Y_{\text{Gm}}^2 = \frac{1}{2\pi} \oint Y_{\text{G}}^2 d\varphi \text{ längs } \tilde{Z} = A_0 + R_{\text{QS}} e^{i\varphi}.$$

Unter Beachtung von (II, 12) und (II, 13) erhält man

$$Y_{\text{Gm}}^2 = \frac{1}{k \frac{q' - q}{q}} \left\{ \varepsilon N \left[2B - A_0^2 - \frac{R_{\text{QS}}^2}{2} \right] + \right. \quad (\text{II, 14})$$

$$\left. \sum_r \frac{1}{2} Q S_v \ln \frac{[(A_0 - A_v)^2 + C_v^2] [A_0 - A_v - 4B]^2 + C_v^2}{[(A_0 + A_v)^2 + C_v^2] [A_0 + A_v - 4B]^2 + C_v^2} \right\} \dots$$

Man erkennt, daß der Einfluß entfernter Brunnen sehr rasch schwindet. Für den Fall einer leistungsgleichen und aequidistanten Brunnenreihe vereinfacht sich der obige Ausdruck unter der nicht sehr einschränkenden Bedingung

$$\frac{4B}{C} \pi > 6,5$$

zu

$$Y_{\text{Gm}}^2 = \frac{\varepsilon N}{k \frac{q' - q}{q}} \left[2BA - A^2 - \frac{QS}{2\varepsilon N\pi} \right] + \frac{QS}{\pi k \frac{q' - q}{q}} \ln \frac{\sqrt{\frac{QS}{\varepsilon N\pi}} \cdot \pi}{C \sinh \left[\frac{2A}{C} \pi \right]} \quad (\text{II, 15})$$

Damit sind alle Beziehungen bekannt, um auch für die Trinkwasserversorgung einer langgestreckten Insel den Zusammenhang zwischen geförderter Wassermenge und Salzgehalt näherungsweise errechnen zu können.

F. Zahlenbeispiel

Bohrt man auf einer langgestreckten Insel (ähnlich Norderney: $\varepsilon N = 3,84 \cdot 10^{-4}$ m/d; $k \frac{q' - q}{q} = 7,68 \cdot 10^{-2}$ m/d; $2B = 2000$ m) eine aequidistante Brunnenreihe (Abstand der Brunnen untereinander $C = 400$ m; Abstand der Brunnen von der Küste $A = 400$ m) und fördert aus jedem dieser Brunnen $QS = 100$ m³/d an Süßwasser, so erhält man

$$R_{\text{QS}} = 282 \text{ m}.$$

Aus Gl. (II, 15) folgt dann, da $\frac{4B}{C} \pi > 6,5$

$$Y_{\text{Gm}} = 31,6 \text{ m}.$$

Wählt man nun die Brunnentiefe $TB = 30$ m, so folgt aus Gl. (II, 10) unter Zuhilfenahme von Bild 15 für den relativen Salzgehalt des entnommenen Wassers

$$S/S' = 0,26 .$$

Je Brunnen werden somit $Q = 135 \text{ m}^3/\text{d}$ Brackwasser mit einem Salzgehalt von ca. 0,75 % gefördert. Ordnet man 15 Brunnen dieser Art auf der 7 km langen Insel Norderney an, so lassen sich täglich 2000 m^3 Brackwasser fördern, aus dem sich mit Hilfe einer Süßwassergewinnungsanlage nach einem Membranverfahren [2, 3] 1000 m^3 Trinkwasser täglich erzeugen lassen. Dies stellt einen Mittelwert dar, von dem zu Zeiten eines Spitzenbedarfs sicher stark abgewichen werden kann, da die „Brunnensenkungstrichter“ zu Zeiten geringeren Bedarfs wegen ihres Zeitverhaltens (siehe Bild 12) einen nahezu vollständigen Speicher, für das dann im Einzugsbereich versickernde Süßwasser darstellen.

Literatur

- [1] Herzberg: Die Wasserversorgung einiger Nordseebäder, Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung. Nr. 45 (1901) 44. Jg., S. 815–819 u. 842–844.
- [2] Hausen, H.: Gewinnung von Süßwasser aus dem Meer, Chemie-Ingenieur-Technik, 35. Jg. (1963) Nr. 3, S. 143–147.
- [3] Schröder, J.: Süßwasser aus dem Meer, Brennstoff-Wärme-Kraft 23 (1971) Nr. 5, S. 219–223.
- [4] Schröder, J.: Die Süßwasserlinse, Dissertation TU Hannover 1969.
- [5] Ebach u. White: Mixing of fluids flowing through beds of packed solids. AIChE Journal 4 (1958) S. 161–169.
- [6] Liles u. Geankoplis: Axial diffusion of liquids in packed beds and end effects. AIChE Journal 6 (1960) S. 591–595.
- [7] Betz, A.: Konforme Abbildungen, Springer-Verlag 1948.
- [8] Nomitsu, T.: On the Contact Surface of Fresh- and Salt-Water under the Ground near a Sandy Sea-Shore. Memoirs of the College of Science, Kyoto. Imperial University, Series A, Vol. X (1927) S. 279.
- [9] Forchheimer, Ph.: Über die Scheidefläche von Brunnenwasser und Seewasser an einer Sandküste. Das Gas- und Wasserfach 71. Jg. (1928), H. 6, S. 124.
- [10] Albring, W.: Angewandte Strömungslehre, Steinkopff-Verlag, Leipzig 1961, S. 52.